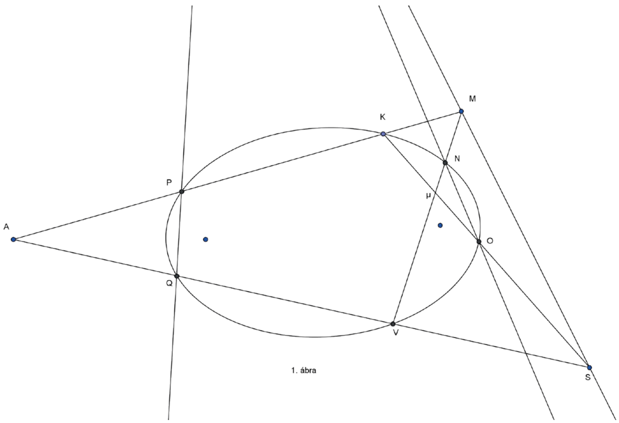
Blaise Pascal:
Esszé a kúpszeletekről

Első definíció: Amikor több egyenes egy pontban metszi egymást, vagy párhuzamosak egymással, akkor azonos rendbe tartozóknak vagy azonos rendbeli egyeneseknek nevezzük őket, míg az egyenesek összességét egyenesek rendjének nevezzük.

Második definíció: A kúpszelet kifejezésen a körvonalat, az ellipszist, a hiperbolát, a parabolát és a szöget értjük, amelyek úgy keletkeznek, hogy egy kúpot az alapjával párhuzamosan, vagy a csúcsán keresztül, vagy három másik, ellipszist, hiperbolát vagy parabolát eredményező szögben elvágunk, és így a kúp palástján körvonal, szög, ellipszis, hiperbola, vagy parabola rajzolódik ki.

Harmadik definíció: Ha röviden csak egyenest írunk, akkor egyenes vonalat értünk alatta.

Első tétel (1. ábra): Ha az MSQ síkon az M pontból két egyenes indul: MK és MV, és az S pontból is két egyenes indul: SK, SV, és K legyen MK és SK egyenesek metszéspontja, és V legyen MV és SV egyenesek metszéspontja, és A legyen MK és SV egyenesek metszéspontja, és μ legyen MV és SK egyenesek metszéspontja, és az A, K, μ, V pontok közül kettőn, amelyek ne essenek egy egyenesre M és S pontokkal, K-n és V-n, haladjon át egy körvonal, amely a MV, MK, SV és SK egyeneseket O, P, Q, N pontokban metszi, akkor azt állítom, hogy MS, NO és PQ egyenesek azonos rendbe tartoznak.



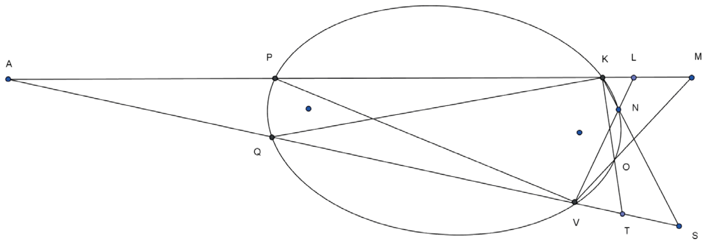
1. ábra

Blaise Pascal: *Esszé a kúpszeletekről*
Különbség, **XIII. évf. / 1. szám | 2013 május, 13-17. o.**

Második tétel: Ha ugyanazon az egyenesen több sík halad keresztül, és ezeket egy másik síkkal elmetsszük, akkor a síkokon a metszéssel kapott egyenesek azonos rendbe tartoznak azzal az egyenessel, amelyeken a síkok keresztülhaladnak.
Ha feltesszük e két tételt, valamint néhány belőlük könnyen levezethető következményt, akkor bizonyítható, hogy elfogadva mindazt, amit az első tételben állítottunk, ha a K és V pontokon bármilyen kúpszelet keresztülhalad, amely az MK, MV, SK és SV egyeneseket az O, N, Q pontokon metszi, akkor az MS, NO, PQ egyenesek azonos rendbeliek lesznek. Ez lesz a harmadik tétel.

E három tétel és néhány belőlük levezetett következmény alapján meg fogjuk adni a kúp és a kúpszeletek minden elemét *(éléments coniques complets)*, tehát az átmérők, a paraméterek, az érintők stb. minden tulajdonságát, a kúp meghatározását majdnem minden adatával, a kúpszeletek leírását pontonként stb.

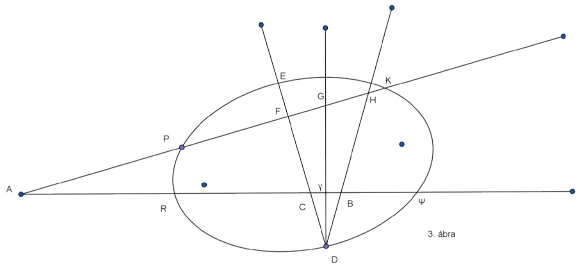
Ezt követően egyetemesebb módon határozzuk meg az ebből nyert tulajdonságokat, mint általában szoktuk. Például ezt (2. ábra): ha az MSQ síkon és a PKV kúpszeleten felvesszük AK és AV egyeneseket úgy, hogy a kúpszeletet P, K valamint Q, V pontokban metsszék, és ha e négy pontból kettőn, amelyek nem esnek A-val egy egyenesre, K-n és V-n keresztül, továbbá N és O pontokon keresztül, amelyek a kúpszeleten fekszenek, négy egyenest húzunk, KN-t, KO-t, VN-t és VO-t, amelyek az AV és az AP egyeneseket az S, T, L, M pontokban metszik, akkor azt állítom, hogy a PM és az MA arányának, valamint az AS és SQ arányának hányadosa megegyezik PL és LA arányának, valamint AT és TQ arányának hányadosával.[1]



2. ábra

1 $\frac{PM}{MA} \times \frac{AS}{SQ} = \frac{PL}{LA} \times \frac{AT}{TQ}$

Azt is bizonyítani fogjuk (3. ábra), hogy ha DE, DG, DH egyenesek AP és AR egyeneseket F, G, H, C, γ, B pontokban metszik, és a DC egyenes tartalmazza E pontot, akkor az EFxFG és ECxCγ téglalapok arányának és az Aγ, AG szakaszok arányának a hányadosa megegyezik az EFxFH és ECxCB táglalapok arányának és az AB, AH szakaszok arányának hányadosával. Ez pedig egyenlő az FExFD és az ECxCB téglalapok arányával.[2] Következésképpen, ha E és D pontokon keresztülhalad egy kúpszelet, amely AH és AB egyeneseket P, K, R és ψ pontokon metszi, akkor az EFxFG és az ECxCγ téglalapok arányának és a γA és AG egyenesek arányának hányadosa egyenlő az FKxFP és a CRxCψ téglalapok arányának és az ARxAψ és az AKxAP téglalapok arányának hányadosával.[3]



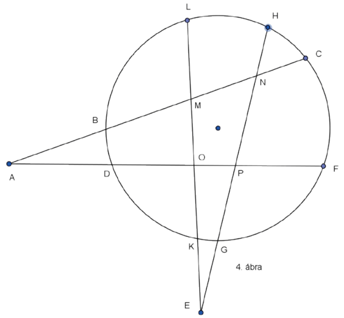
Azt is bizonyítani fogjuk (4. ábra), hogy ha AC, AF, EH, EL egyenesek N, P, M, O pontokban metszik egymást, és egy kúpszelet ezeket az egyeneseket C, B, F, D, H, G, L, K pontokban metszi, akkor az MCxMB és a PFxPD téglalapok arányának és a ADxAF és az ABxAC téglalapok arányának hányadosa egyenlő az MLxMK és a PHxPD téglalapok arányának és az EHxEG és az EKxEL téglalapok arányának hányadosával.[4]

Bizonyítani fogjuk a kúpszeletek ama tulajdonságát is (5. ábra), amelynek első felfedezője a lyoni Desargues úr volt, korunk egyik nagy szelleme, a matematikában és többek között a kúpszeletek kérdéseiben legjáratosabb személyek egyike, kinek jártasságát mindazok számára tanúsítják írásai, akik hajlandók voltak befogadni és képesek voltak megérteni azokat. Be kell

2 $\frac{EF \times FG}{EC \times C\gamma} \times \frac{A\gamma}{AG} = \frac{EF \times FH}{EC \times CB} \times \frac{AB}{AH} = \frac{FE \times FD}{CE \times CD}$

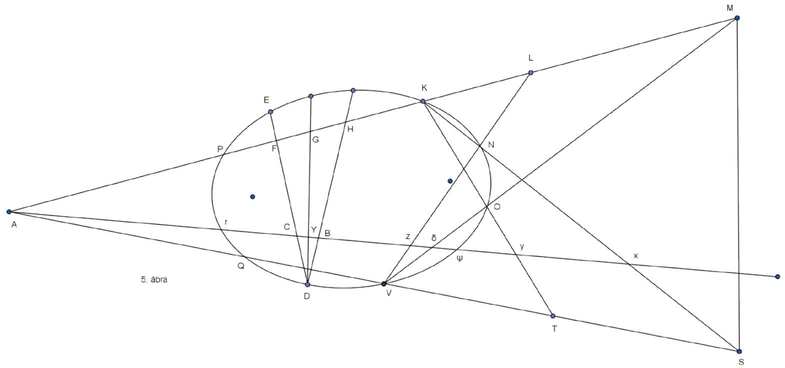
3 $\frac{EF \times FG}{EC \times C\gamma} \times \frac{\gamma A}{AG} = \frac{FK \times FP}{CR \times C\psi} \times \frac{AR \times A\psi}{AK \times AP}$

4 $\frac{MC \times MB}{PF \times PD} \times \frac{AD \times AF}{AB \times AC} = \frac{ML \times MK}{PH \times PG} \times \frac{EH \times EG}{EK \times EL}$



4. ábra

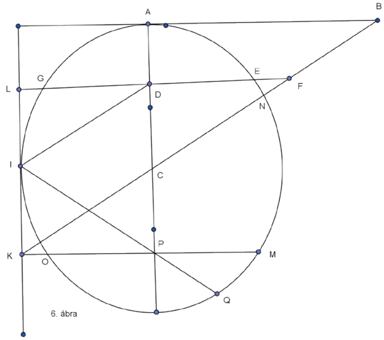
vallanom, hogy mindazt a keveset, amit e területen felfedeztem, az ő írásainak köszönhetem, és, amennyire tőlem telt, igyekeztem a kúpszeletek kapcsán az ő módszerét utánozni anélkül, hogy a tengelyen átmenő háromszögek módszeréhez folyamodtam volna.[5] És általánosságban minden kúpszeletet tárgyalva azoknak a következő csodálatos tulajdonsága állapítható meg: ha az MSQ síkon fekszik PQV kúpszelet, amelynek K, N, O, V pontjain keresztül úgy vesszük fel KN, KO, VN, VO egyeneseket, hogy a négy pont mindegyikén csupán két egyenes menjen keresztül, és egy másik egyenes a kúpszeletet r, ψ pontokon, a KN, KO, VN, VO egyeneseket pedig az x, y, z, δ pontokon metszi, akkor a zr x zψ téglalaphoz úgy aránylik a yr x yψ téglalap, ahogy a δr x δψ téglalaphoz aránylik az xr x xψ téglalap.



5. ábra

5 Utalás Apollónius (Kr. e. 262 – Kr. e. 190) módszerére, aki a kúpszeletek első felfedezője volt.

Bizonyítani fogjuk azt is (6. ábra), hogy ha a C középpontú AGE hiperbola, ellipszis vagy kör síkján felveszünk egy AB érintőt, amely A pontban érinti a kúpszeletet, és CA átmérőt megrajzolva felvesszük az AB egyenest, amelynek négyzete legyen egyenlő az ábra téglalapjának egynegyedével, és felvesszük CB egyenest, akkor húzzunk AB-vel bármilyen párhuzamos egyenest, miként DE-t, amely a kúpszeletet E pontban, az AC és a CB egyeneseket pedig D és F pontokban metszi, és ha az AGE kúpszelet ellipszis vagy kör, akkor a DE és a DF egyenesek négyzetének összege egyenlő lesz az AB egyenes négyzetével. A hiperbola esetén pedig a DE és DF egyenesek négyzetének különbsége egyenlő lesz az AB négyzetével.



6. ábra

Néhány problémát is meg fogunk oldani, mint például: húzzunk érintőt egy adott pontból egy adott kúpszelethez.
Találjunk meg egy adott szöget bezáró két átmérőt.
Találjunk meg egymással adott szöget bezáró, és egymással meghatározott arányban álló két átmérőt.

Van még több más probléma és tétel, valamint az előzőekből levezethető több következmény is, ám a tapasztalatlanságomból és csekély képességeimből eredő bizalmatlanság nem engedi, hogy előadjam őket annak előtte, hogy megvizsgáltatnám arra alkalmas személyekkel, akik méltóztatnak ez ügyben fáradozni. Utána azonban, amennyiben a dolgot folytatásra méltónak ítélik, megpróbáljuk mindaddig fejleszteni, ameddig Isten, erőt adván, a számunkra lehetővé teszi.

Párizs, 1640

Fordította: Pavlovits Tamás